Chapitre 1: modèle géométrique direct

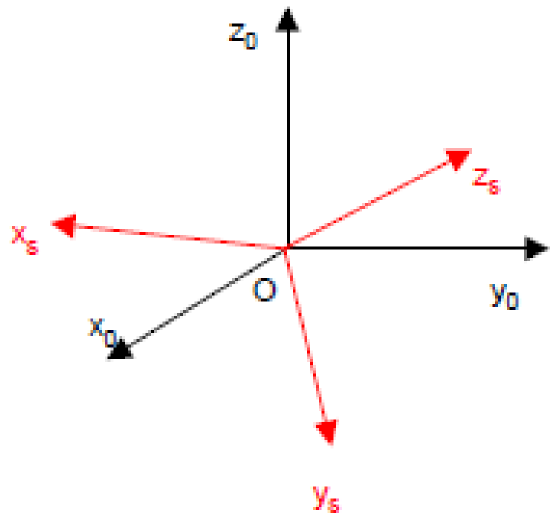
Paramétrage des rotations en 3D

Passage du repère Rs au repère Ro :

- Les colonnes de la matrice Ro,s (3*3) correspondent aux projections sur {Ro} des vecteurs unitaires du repère {Rs}.

$$R_{0,S} = \left[x_s / R_0 \quad y_s / R_0 \quad z_s / R_0 \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \langle x_s | x_0 \rangle & \langle y_s | x_0 \rangle & \langle z_s | x_0 \rangle \\ \langle x_s | y_0 \rangle & \langle y_s | y_0 \rangle & \langle z_s | y_0 \rangle \\ \langle x_s | z_0 \rangle & \langle y_s | z_0 \rangle & \langle z_s | z_0 \rangle \end{bmatrix}$$



• 9 paramètres pour seulement 3 rotations possibles de {Rs }/ {Ro} !

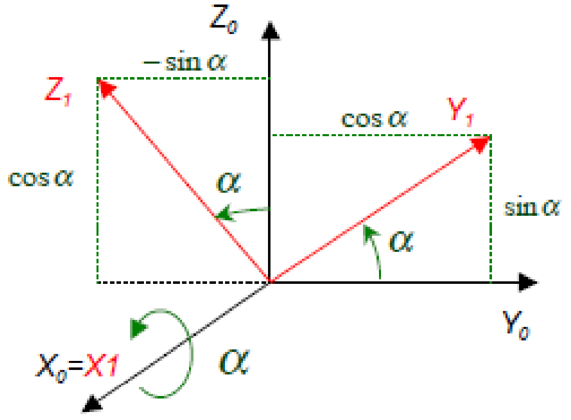
• En principe 3 paramètres suffisent…

• Une orientation spatiale donnée d'un repère par rapport à un autre, peut être décrite de manière suffisante par trois rotations successives dont le résultat correspond à l'orientation donnée.

• Pour exprimer ces trois rotations on utilise des **conventions** telles que les angles d'Euler, les angles de Brayant...etc

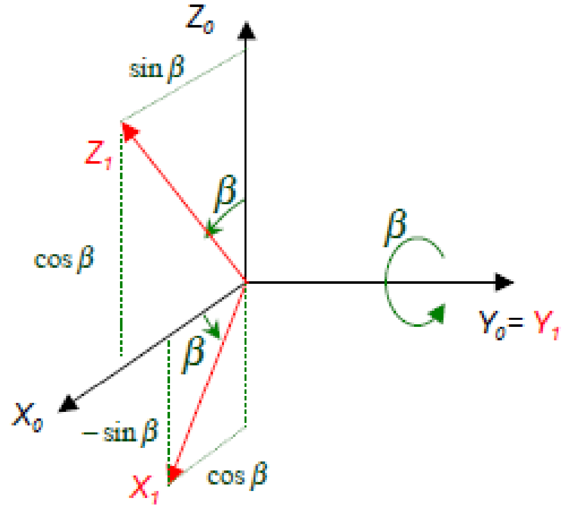
Rotation autour d'un seul axe :

Rotation autour de x_0



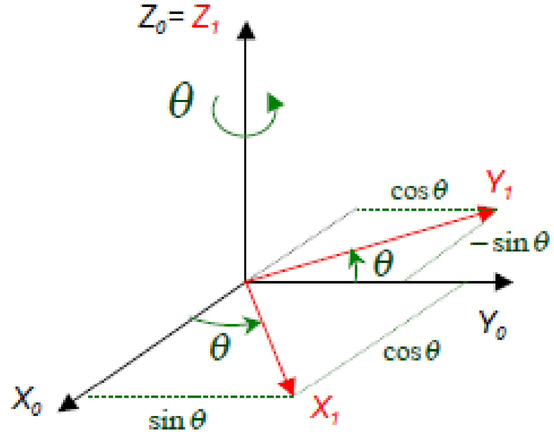
$$R_{\alpha/x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Rotation autour de y_0



$$R_{\beta/y} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Rotation autour de z_0



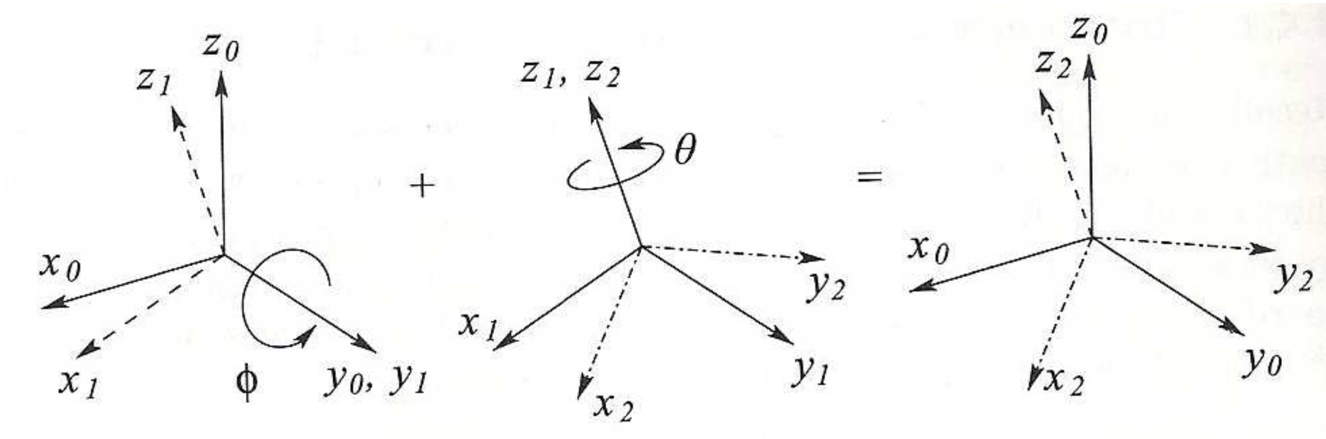
$$R_{\theta/z} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Rappels:

- les projections sur les axes sont perpendiculaires
- la projection du vecteur formant l'hypoténuse du triangle droit, sur le coté adjacent correspond au cosinus et la projection sur le coté opposé correspond au sinus.

Deux rotations successives :

Passage du repère {R0} au repère {R2}



- 1 rotation d'angle ϕ autour de y0(=y1)

$$R_{\phi/y_0} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

- 1 rotation d'angle θ autour de z1(= z2)

$$R_{\theta/z_1} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

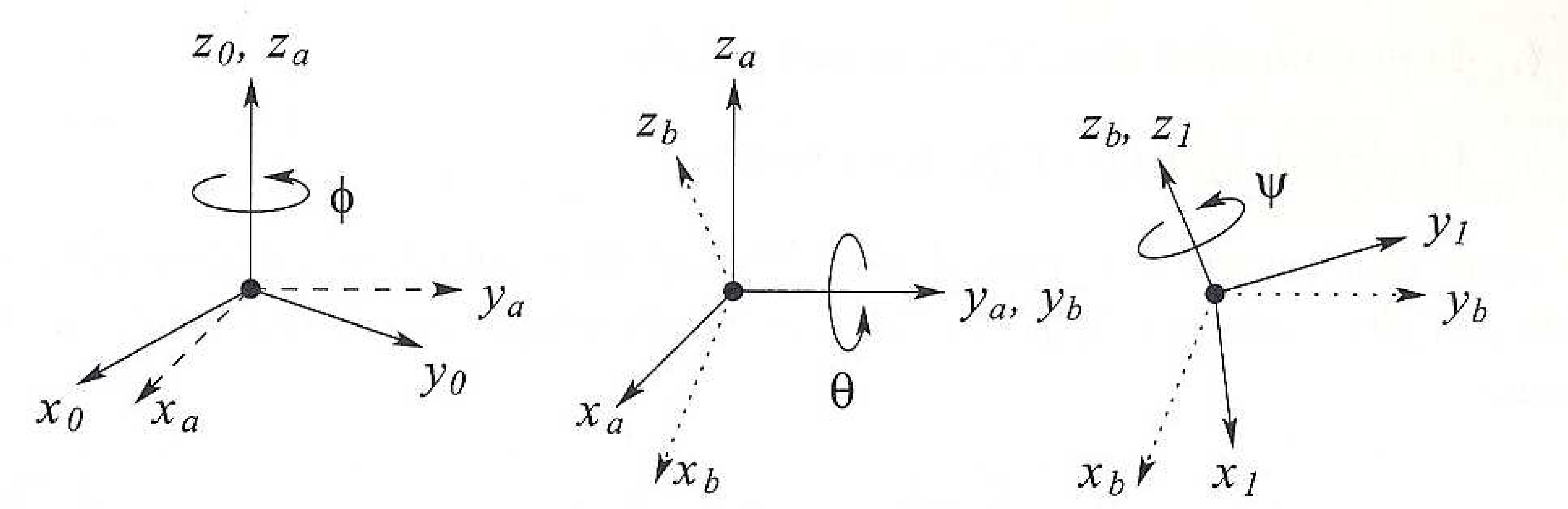
- la rotation globale résultant de ces deux rotations est exprimée par une matrice de rotation:

$$R_{0,2} = R_{\phi/y_0}\, R_{\theta/z_1}$$

$$R_{0,2} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta & -\cos\phi\sin\theta & \sin\phi \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\phi\cos\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Trois rotations successives : Angles d'Euler Z-Y-Z

- 1 rotation d'angle ϕ autour de z0, Rϕ/z
- 1 rotation d'angle θ autour de ya, Rθ/y
- 1 rotation d'angle ψ autour de zb, Rψ/z

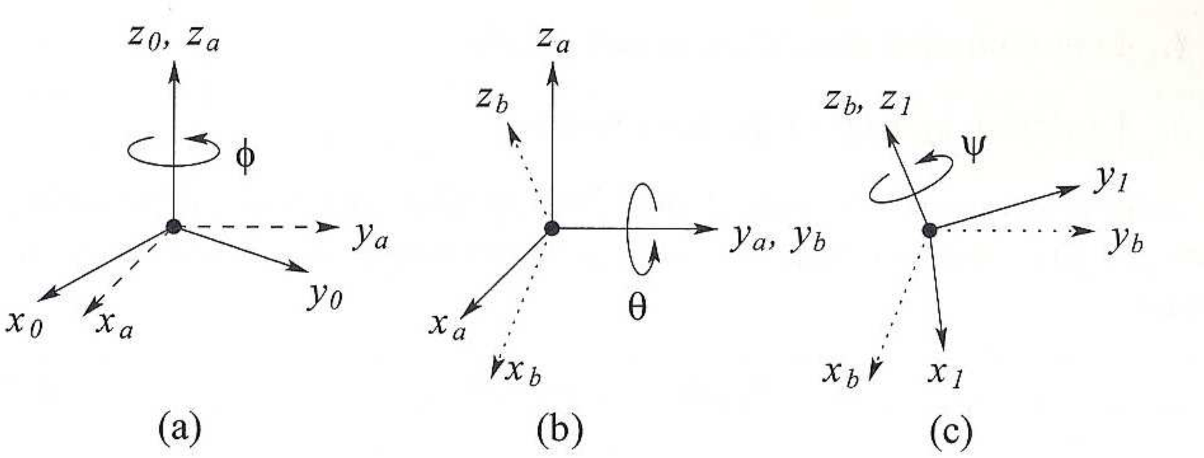


(a) (b) (c)

Question: déterminer la matrice de passage du repère 1 vers le repère 0

Trois rotations successives : convention des angles d'Euler Z-Y-Z

Question: déterminer la matrice de passage du repère 1 vers le repère 0



$$R_{\phi/z} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{\theta/y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_{\psi/z} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

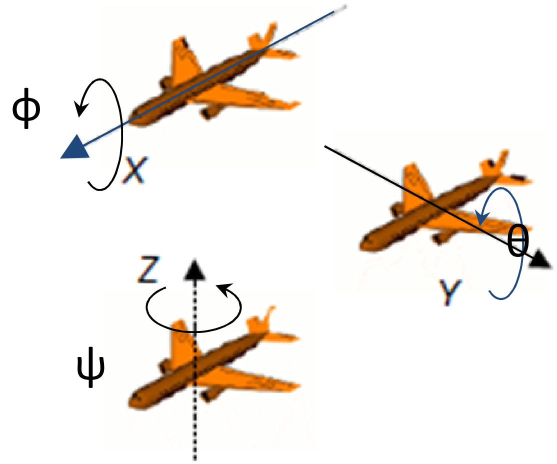
- la rotation globale résultant de ces trois rotations est exprimée par une matrice de rotation:

$$R_{0,1} = R_{\phi/z} R_{\theta/y} R_{\psi/z}$$

$$R_{0,1} = \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}$$

Autre convention: angles nautiques: Roulis, tangage, lacet

- 1 rotation d'angle ϕ autour de x0, Rϕ/x « roulis »: il en résulte un nouveau repère {Ra}
- 1 rotation d'angle θ autour de ya, Rθ/y « tangage »: il en résulte un nouveau repère {Rb}
- 1 rotation d'angle ψ autour de zb, Rψ/z « lacet »: il en résulte le repère final soit {R1}



$$R_{\phi/x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$R_{\theta/y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_{\psi/z} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- la rotation globale résultant de ces trois rotations est exprimée par une matrice de rotation:

$$R_{0,1} = R_{\phi/x} R_{\theta/y} R_{\psi/z}$$

$$R_{0,1} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & -c_\theta s_\psi & s_\theta \\ s_\phi s_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & -s_\phi c_\theta \\ -c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi + s_\phi c_\psi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}$$

Calcul des angles nautiques à partir d'une orientation donnée

Etant donnée une matrice de rotation Ro,s exprimant l'orientation du repère {Rs} par rapport au repère {Ro} :

$$R_{0,S} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Si l'on choisit d'interpréter cette orientation en utilisant la convention des angles nautiques, il suffit d'identifier les éléments de la matrice Ro,s donnée, aux éléments de la matrice de rotation des angles nautiques présentée plus haut. Il vient :

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & -c_\theta s_\psi & s_\theta \\ s_\phi s_\theta c_\psi + c_\phi\, s_\psi & -s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi\, c_\psi & -s_\phi\, c_\theta \\ -\mathrm{c}_\phi\, s_\theta c_\psi + s_\phi\, s_\psi & \mathrm{c}_\phi\, s_\theta s_\psi + s_\phi\, c_\psi & \mathrm{c}_\phi\, c_\theta \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} r_{11} &= c_\theta\, c_\psi \\ r_{12} &= -c_\theta\, s_\psi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{-r_{12}}{r_{11}} = \frac{s_\psi}{c_\psi} = \tan(\psi) \Rightarrow \psi = \arctan\left(\frac{-r_{12}}{r_{11}}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} r_{23} &= -s_\phi\, c_\theta \\ r_{33} &= \mathrm{c}_\phi\, c_\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{-r_{23}}{r_{33}} = \frac{s_\phi}{c_\phi} = \tan(\phi) \Rightarrow \phi = \arctan\left(\frac{-r_{23}}{r_{33}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} r_{13} = s_\theta \\ c_\theta^2 + s_\theta^2 = 1 \Rightarrow c_\theta = \pm\sqrt{1 - s_\theta^2} = \pm\sqrt{1 - r_{13}^{\,2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{r_{13}}{\pm\sqrt{1 - r_{13}^{\,2}}} = \frac{s_\theta}{c_\theta} = \tan(\theta)$$

$$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{r_{13}}{\pm\sqrt{1 - r_{13}^{\,2}}}\right)$$

On peut également utiliser la fonction antan2 qu'on retrouve notamment sous Matlab, cette fonction permet de donnée le quadrant se l'angle calculé. On écrira alors:

$$\psi = \operatorname{atan2}(-r_{12},\ r_{11})$$

$$\phi = \operatorname{atan2}(-r_{23},\ r_{33})$$

$$\theta = \operatorname{atan2}\left(r_{13},\ \pm\sqrt{1 - r_{13}^{\,2}}\right)$$

Ex: si on veut adopter la convention des angles d'Euler Z-Y-Z pour interpréter la matrice Ro,s donnée, exprimer les angles d'Euler en fonction des éléments de la matrice Ro,s.

Remarques:

- La combinaison de deux rotations successives n'est pas commutative

$$R_{\phi/x}\,R_{\theta/y} \neq R_{\theta/y}\,R_{\phi/x}$$

Ex: monter que

$$R_{\pi/x}\,R_{\frac{\pi}{2}/y} \neq R_{\frac{\pi}{2}/y}\,R_{\pi/x}$$

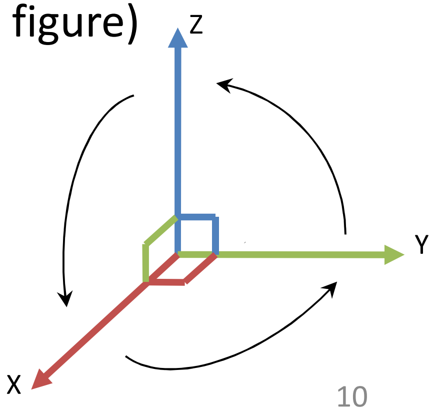
- Deux rotations successives autour d'un même axe ne font qu'une avec l'addition des angles des deux rotations :

$$R_{\phi/x}\,R_{\theta/x} = R_{\phi+\theta/x}$$

Exemple:

$$R_{\phi/x}\,R_{-\phi/x} = \left[I_{3\times3}\right]$$

- Par convention les repères en robotique sont des trièdres directs (voir figure)



$$X \wedge Y = Z,\ Y \wedge Z = X,\ Z \wedge X = Y$$

- Repères orthonormés => matrices de rotation orthogonales

$$R^{-1} = R^{T}$$